

Część I: Trygonometria, funkcje cyklometryczne

Zadanie 1. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = -3x + 1$.

Zadanie 2. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \frac{x}{1+x}$, jeśli $D_f = \mathbb{R}_+$.

Zadanie 3. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

Zadanie 4. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji liniowej $f(x) = ax + b$.

Zadanie 5. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = e^x$. Narysować w jednym układzie współrzędnych f oraz f^{-1} .

Zadanie 6. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = 2 - \sqrt[5]{x+2}$.

Zadanie 7. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2}, & \text{gdy } x \neq -2, \\ 2, & \text{gdy } x = -2. \end{cases}$$

Zadanie 8. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{gdy } x < 0, \\ 2x, & \text{gdy } x \in [0, 1), \\ x+1, & \text{gdy } x \geq 1. \end{cases}$$

Zadanie 9. Znaleźć funkcję odwrotną (jeśli istnieje) do funkcji $f(x) = [x]$.

Zadanie 10. Znaleźć funkcję odwrotną (jeśli istnieje) do funkcji $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zadanie 11. Wyznaczyć i narysować \arcsin , \arccos , \arctg , arctg .

Zadanie 12. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $y = \arcsin \frac{1}{2}$

b) $y = \arctg 1$

c) $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$

d) $\arcsin x = -\frac{\pi}{3}$

e) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$

f) $\arccos x = 0$

g) $\arctg x = -\frac{\pi}{6}$

h) $\arctg x = \pi$

i) $\text{arctg } x = -\frac{\pi}{6}$

j) $\text{arctg } x = \frac{\pi}{6}$

k) $\arcsin(3x+5) = \frac{\pi}{3}$

l) $\text{arctg}(x^2+3x-7) = \frac{\pi}{4}$

m) $\arctg(\sin x + \frac{1}{2}) = 0$

n) $\arcsin 2x < 0$

o) $-\frac{\pi}{4} \leq \text{arctg}(5x-2) < 3$

Zadanie 13. Przedyskutuj liczbę rozwiązań równania

$$-2 \arcsin(|x| - 1) = m$$

w zależności od wartości parametru m .

Zadanie 14. Które z funkcji cyklometrycznych są: parzyste, nieparzyste, ograniczone, rosnące, malejące?

Zadanie 15. Udowodnij równość:

$$\forall x \in [-1, 1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Zadanie 16. Dla jakich wartości parametru α suma kwadratów dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 - 2x \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 0$ jest równa 3?

Zadanie 17. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x + |\sin x|}{\cos x}$ dla $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 18. Rozwiąż równanie: $\sin x \sin 2x = \frac{3}{2} \cos x$ w przedziale $[-2\pi, \pi]$.

Zadanie 19. Rozwiąż równanie: $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 20. Rozwiąż równanie: $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$ dla $x \in [0, 4\pi]$.